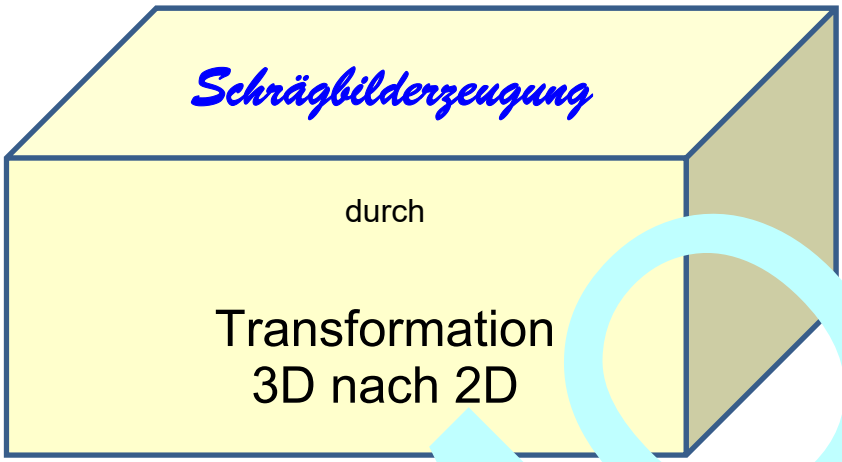


DEMO

Datei N[illegible]2050

Stand 22. Juli 2021

FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Die Lehrpläne für Gymnasien sehen in den deutschen Bundesländern unterschiedlich aus.
Das Thema Matrizen wird in einigen sehr ausführlich behandelt, in anderen werden dagegen nur wenige Grundlagen und kaum Anwendungen behandelt.

Die Verwendung von Matrizen für Abbildungen ist ein naheliegendes Thema.
Dazu gibt es in der Mathe-CD im Ordner 21 zahlreiche Texte zu „affinen Abbildungen“ im $\mathbb{R}^2$.

Die Darstellung eines Körpers als Schrägbild im $\mathbb{R}^2$ ist eine weitere Möglichkeit.
Das ist der Inhalt dieses Textes.

Ich zeige, wie man auf verschiedene Arten Schrägbilder darstellen kann und verwende zur Umrechnung der 3D-Koordinaten in 2D-Koordinaten geeignete Matrizen.
Deren Erstellung und Handhabung ist sehr einfach und wird an einigen Beispielen gezeigt.

Inhalt:

1. Tafelprojektionen: Grundriss, Seitenriss, Aufriss 3
   - 1.1 Was wollen wir? 3
   - 1.2 Drei-Tafel-Projektion Beispiel 1: Haus mit Walmdach 4
2. Die Kavaliersprojektion 7
   - 2.1 Die „Standardprojektion“ Beispiel 2: Quadratische Pyramide 7
     - Drehung dieser Pyramide um den Ursprung um 30° 9
     - Beispiel 3: Einfaches Haus 10
     - Zusatz: Drehung des Schrägbildes um die z-Achse um 45°. 11
   - 2.2 Eine andere Art der Kavaliersperspektive (zu Beispiel 1 und 2) 12
   - 2.3 Aufgabe: Kavalierprojektion einer Treppe 15
   - 2.4 Würfeldarstellungen aus verschiedenen Sicht-Richtungen 17
3. Projektionen mit zwei schrägen Achsen 19
   - 3.1 Allgemeine Formeln zur Projektion 19
   - 3.2 Zu Beispiel 2 20
   - 3.3 Zu Beispiel 3 23
   - 3.4 Die Militärprojektion 24
   - 3.5 Die Isometrie 25

DEMO

Transformation von 3D-Koordinaten in 2D-Koordinaten

1 TAFELPROJEKTIONEN

1.1 Was wollen wir?

Es gibt verschiedene Möglichkeiten einen Gegenstand, also ein Objekt aus dem $\mathbb{R}^3$ in einer Zeichenebene, also im $\mathbb{R}^2$ darzustellen. Dabei werden die Punkte des $\mathbb{R}^3$ auf die Projektionsebene, also auf eine Koordinatenebene projiziert. Verlaufen diese Projektionsstrahlen parallel, spricht man von einer **Parallelprojektion**.

Die einfachste Parallelprojektion ist die **Tafelprojektion in eine Koordinatenebene**.
Entsteht das Bild in der xy-Ebene, nennt man es **Grundriss**,
in der yz-Ebene: **Aufriss**,
in der xz-Ebene: **Seitenriss**.
Diese drei Risse zusammen in einer Darstellung nennt man eine **Dreitafel-Projektion.**

In der sogenannten „Darstellenden Geometrie“ lernt man, wie man aus diesen Ansichten sogenannte Schrägbilder entwickelt, also Darstellungen, die (im Gegensatz zu den Rissen) einen räumlichen Eindruck vermitteln.

In diesem Text werden wir nicht konstruieren sondern mit Vektor-Matrizen-Rechnungen zweidimensionale Koordinaten des Körpers berechnen. Dazu gibt es verschiedene Projektionsarten, von denen die in der Schule wichtigsten besprochen werden.

DEMO

1.2 Drei-Tafel-Projektion

Als erstes Beispiel verwende ich ein **einfaches Haus mit Walmdach**.
Ich zeige zunächst einmal zwei räumliche Darstellungen (Schrägbilder) verschiedener Art.

Abb.1

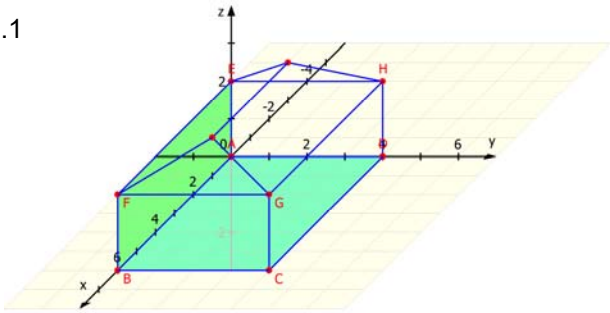


Abb. 2

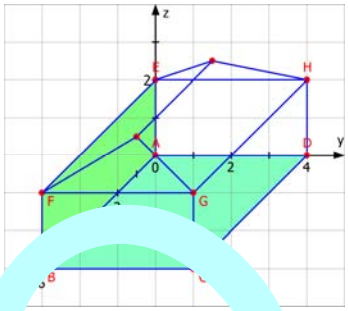
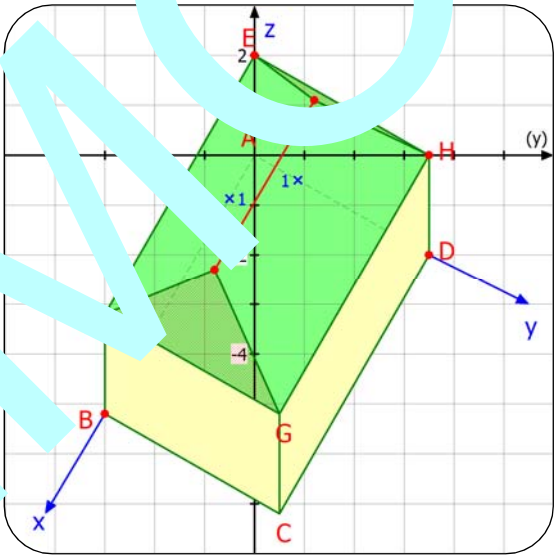


Abb. 3



Die Abbildungen 1 und 2 sind – sieht man einmal von dem zugrunde liegenden Quadratmuster ab - identisch. Hier wurden die wesentlichen Punkte des Hauses in die xy-Ebene projiziert. Dazu wurde eine schräge x-Achse eingezeichnet und die x y-Achse neu benannt un y- bzw. z-Achse.
Man nennt eine solche Darstellun ne **Kavaliersprojektion.**

In Abb. 3 wurde die Mili rojektion ge ut, die eher eine Draufsicht ve lt.
Sie wird in Abschnitt 3.4 bespr n.

Für Archi en besonder htig sin **iprojektionen**, denn diese Darstellungen sind länge u, winkeltreu und fl entreu. Das heißt die Darstellungen sind nicht verkürzt oder verzerrt und ma nn darin messen. I zeige nun die Drei-Tafelprojektion zu diesen Abmessungen:

Ein Haus wird ematisch ch einen liegenden Quader modelliert. Es hat die Länge 6 LE, die Breite 4 LE und d öh LE. Darauf sitzt ein Walmdach der Höhe 1 LE.
die mittlere obere Da ante hat die Länge 4 LE.

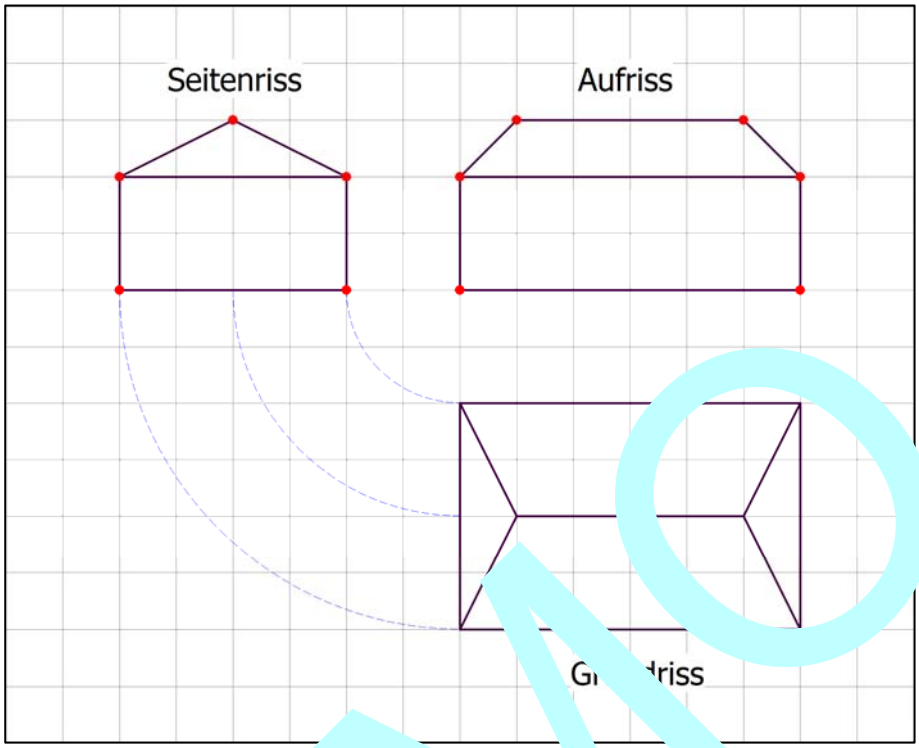
Daraus ermittelt man die 3D-Koorinaten der Ecken:

$A(0|0|0)$, $B(6|0|0)$, $C(6|4|0)$, $D(0|4|0)$, $E(0|0|2)$, $F(6|0|2)$, $G(6|4|2)$, $H(0|4|2)$

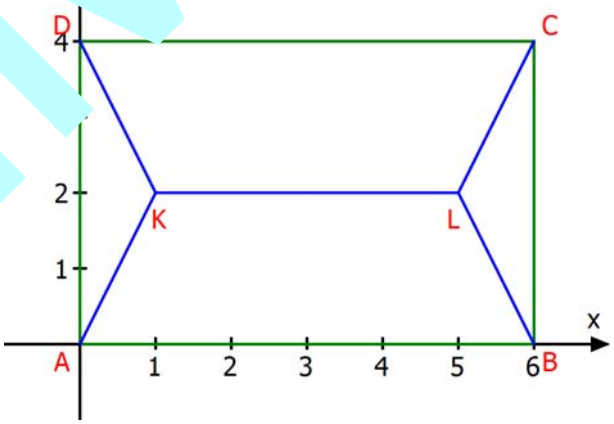
$K(1|2|3)$, $L(5|2|3)$:

DEMO

Hier also die Drei-Tafel-Projektion des Hauses mit Walmdach.



Hier noch einmal der Grundriss allein in der [illegible]ebene.
Man kann die Koordinaten diese[illegible]punkte nat[illegible]h berechnen. Um herauszufind[illegible] wie man das mach[illegible] stelle ich die Zuordnunge[illegible]r Einheitspu[illegible]e dar:



$E_1(0\,|\,0\,|\,0)$ bzw. $\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$E_2(0\,|\,1\,|\,0)$ bzw. $\vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$E_3(0\,|\,0\,|\,1)$ bzw. $\vec{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Für einen beliebige[illegible]t bzw. seinen Ortsvektor gilt dann:

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = x \cdot \vec{e}_1 + y \cdot \vec{e}_2 + z \cdot \vec{e}_3 \rightarrow \vec{x}\,' = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Oder in der Matrixschreibweise: $\vec{x}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

Anwendung: **Berechnung der Koordinaten des Grundrisses für einige Punkte:**

$$B(6\,|\,0\,|\,0) \rightarrow \vec{b}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad B'(6\,|\,0)$$

DEMO

$$C(6\,|\,4\,|\,0) \rightarrow \vec{c}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad C'(6\,|\,4)$$

$$G(6\,|\,4\,|\,2) \rightarrow \vec{g}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad G'(6\,|\,4)$$

$$K(1\,|\,2\,|\,3) \rightarrow \vec{k}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad K'(1\,|\,2)$$

$$L(5\,|\,2\,|\,3) \rightarrow \vec{l}\,' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad l'(5\,|\,2)$$

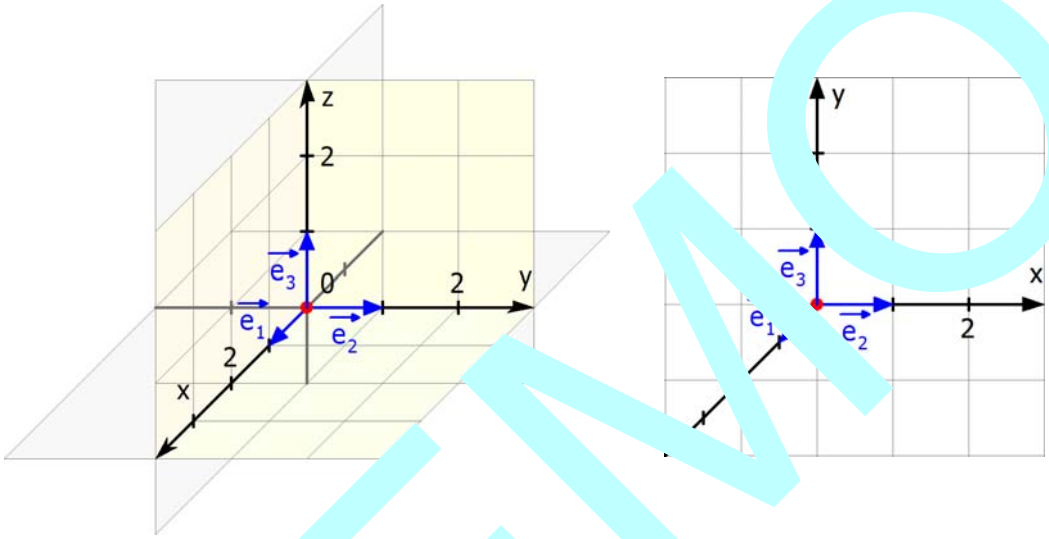
DEMO

2. Die Kavaliersprojektion

Sie wurde im 18. Jahrhundert von französischen Baumeistern entwickelt, deren Aufgabe es war, Festungen zu errichten.

Bei einer **Kavaliersprojektion** werden alle Punkte in die y-z-Ebene projiziert und die x-Achse schräg eingezeichnet und meist verkürzt.

2.1 Das dargestellte Schrägbild verwendet für die x-Achse $\alpha = 45^{\circ}$ und eine Verkürzung mit dem Faktor $k = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.



Bei dieser Abbildung (ich [illegible]ne sie f) we[illegible]n die Vektor[illegible]dinaten wie folgt umgewandelt:

f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$[illegible] = f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-[illegible]os\,45^{\circ}\\ [illegible]\cdot\sin 45^{\circ}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}$$

$$f(\vec{e}_2) = f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

$$f(\vec{e}_3) = f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Da f eine lineare Abbi[illegible]ung ist, gilt für beliebige Vektoren:

$$f(\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) = x\cdot f(\vec{e}_1) + y\cdot f(\vec{e}_2) + z\cdot f(\vec{e}_3) = x\cdot\begin{pmatrix}-0{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + z\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Oder in Matrixschreibweise: $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix}-0{,}5 & 1 & 0\\-0{,}5 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, kurz $f(\vec{x}) = T\cdot\vec{x}$

mit $T = \begin{pmatrix}-0{,}5 & 1 & 0\\-0{,}5 & 0 & 1\end{pmatrix}$

DEMO

Beispiel 2: Schrägbild einer quadratischen Pyramide

mit den Eckpunkten: $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(4|4|0)$, $D(0|4|0)$, $S(2|2|6)$

Transformation der Ortsvektoren:

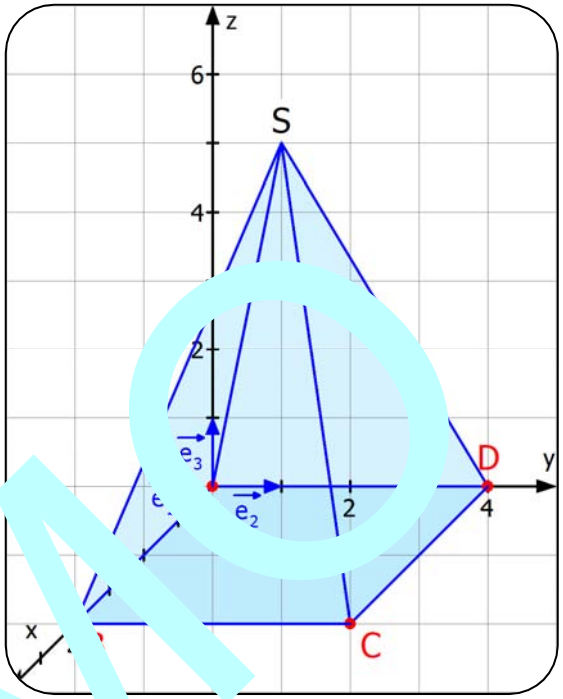
$$f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-0{,}5 & 1 & 0\\-0{,}5 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \Rightarrow A'(0|0)$$

$$f\left(\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-0{,}5 & 1 & 0\\-0{,}5 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow B'(-2|-2)$$

$$f\left(\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-0{,}5 & 1 & 0\\-0{,}5 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\end{pmatrix} \Rightarrow C'(2|-2)$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-0{,}5 & 1 & 0\\-0{,}5 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix} \Rightarrow D'(4|0)$$

$$f\left(\begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-0{,}5 & 1 & 0\\-0{,}5 & 0 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} \Rightarrow S'($$



Abgekürztes Verfahren

Schreibt man die Ortsve[illegible]en der abzu[illegible]enden Punkte [illegible]eine Matrix, kann man alle 5 Punkte auf einmal berechnen:

$$\begin{pmatrix}-0{,}5 & [illegible] & 0\\-0{,}5 & 0 & [illegible]\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0 & 4 & 4 & [illegible] & 2\\0 & 0 & [illegible] & 4 & 2\\0 & [illegible] & 0 & 0 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & -2 & 2 & 4 & 1\\0 & -2 & -2 & 0 & 5\end{pmatrix}$$

DEMO

Zusatz: Drehe diese Pyramide in der Schrägbilddarstellung um 30°.

Bei der Drehung eines Punktes $P(x \mid y)$ um den Ursprung um den Winkel α gegen den Uhrzeigersinn, entsteht ein Bildpunkt $P'(x' \mid y')$ mit den Koordinaten

$$\begin{cases} x' = x \cdot \cos\alpha - y \cdot \sin\alpha \\ y' = x \cdot \sin\alpha + y \cdot \cos\alpha \end{cases} \qquad \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(Siehe dazu Text 21211 Abbildungen)

Mit $\alpha = 30^{\circ}$: $\begin{pmatrix} \cos 30^{\circ} & -\sin 30^{\circ} \\ \sin 30^{\circ} & \cos 30^{\circ} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix}$

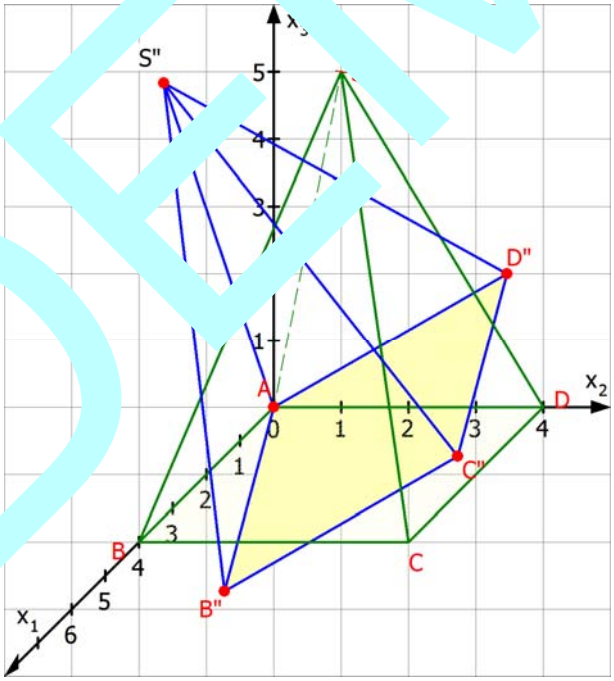
Drehung von $A'(0 \mid 0)$: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A''(0$ [illegible] $)$

Drehung von $B'(-2 \mid -2)$: $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}73 \\ [illegible] \end{pmatrix} \Rightarrow$ [illegible] $(-0{,}73 \mid -2{,}73)$

Weitere Ergebnisse: $C'' \approx (2{,}73 \mid -0{,}73)$

$D'' \approx (3{,}40 \mid 2{,}00)$

Spitze: $S'' \approx (-1,$ [illegible]



DEMO

Lösung:

a) Koordinaten der drei übereinander liegenden Quader:

Unterer Quader:

$(0|0|0),\ (6|0|0),\ (6|8|0),\ (0|8|0)\ ,(0|0|2),\ (6|0|2),\ (6|8|2),(0|8|2)$

Mittlerer Quader:

$(0|0|2),\ (4|0|2),\ (4|6|2),\ (0|6|2)\ ,(0|0|4),\ (4|0|4),\ (4|6|4),(0|6|4)$

Oberer Quader:

$(0|0|4),\ (2|0|4),\ (2|4|4),\ (0|4|4)\ ,(0|0|6),\ (2|0|6),\ (2|4|6),(0|4|6)$

b) Berechnung der Bildpunkte nach der Kavaliersprojektion mit $\begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Unterer Quader:

$$\begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 8 & 0 & 0 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & [illegible] & 0 & -3 & [illegible] \\ 0 & -3 & [illegible] & [illegible] & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

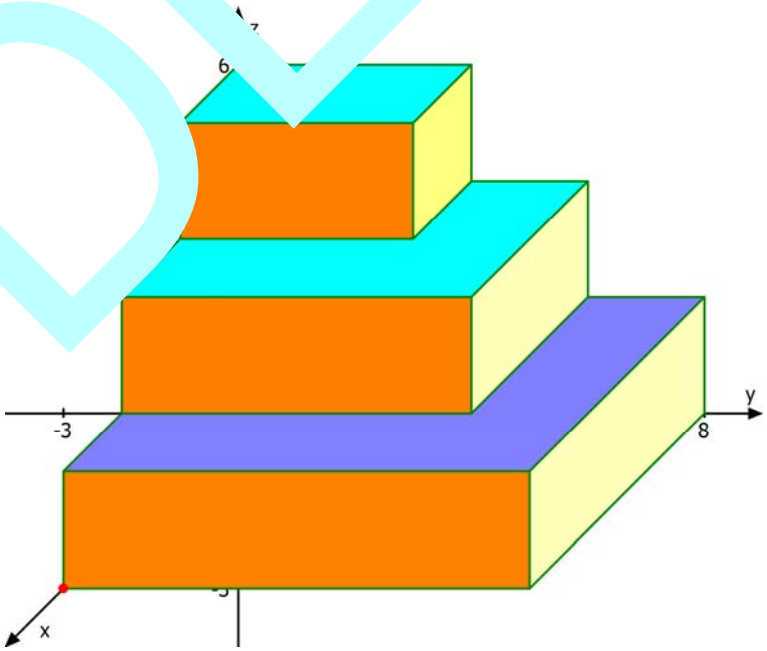
Mittlerer Quader:

$$\begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & 4 & [illegible] \\ 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & [illegible] \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 4 & [illegible] & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad [illegible] \quad 2\ 4\ 6\ 0\ \ 2\ 4\ 6 \quad 2\ 4 \quad 2\ 4$$

Oberer Quader:

$$\begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & [illegible] & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & [illegible] & [illegible] & 4 & 0 & 0 & 4 \\ 4 & [illegible] & [illegible] & 4 & 6 & 6 & [illegible] & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & [illegible] & 0 & -1 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & [illegible] & 6 & 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

c) Schrägbild:



DEMO

2.4 Würfeldarstellungen aus verschiedenen Sicht-Richtungen.

Ich will diesen Würfel auf sechs Arten darstellen:

$A(0|0|0),\ B(2|0|0),\ C(2|2|0),\ D(0|2|0), E(0|0|2),\ F(2|0|2),\ G(2|2|2),\ H(0|2|2).$

Dazu verwende ich folgende Projektionsmatrizen:

a) $T_1 = \begin{pmatrix} -0{,}7\cdot\cos 30^\circ & 1 & 0 \\ -0{,}7\cdot\sin 30^\circ & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}61 & 1 & 0 \\ -0{,}35 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) $T_2 = \begin{pmatrix} -0{,}3\cdot\cos 60^\circ & 1 & 0 \\ -0{,}3\cdot\sin 60^\circ & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} -0{,}15 & 1 & 0 \\ -0{,}15 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $T_3 = \begin{pmatrix} 0{,}3\cdot\cos 30^\circ & 1 & 0 \\ -0{,}3\cdot\sin 30^\circ & 0 & 1 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 0{,}26 & 1 & 0 \\ -0{,}15 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Eine Begründung der Verwendung eines Winkels zu a), b) und c) findet man auf Seite 17.

Damit wird die Richtung der x-Achse im Schrägbild definiert und auch die Längenei

d) $T_4 = \begin{pmatrix} 0{,}26 & 1 & 0 \\ 0{,}62 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e) $T_5 = \begin{pmatrix} 0{,}26 & 1 & 0 \\ -0{,}62 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

f) $T_6 = \begin{pmatrix} -0{,}35 & 1 & 0 \\ 0{,}35 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Lösung: Berechnung aller acht B unkt it e er Matrix.

a) $\begin{pmatrix} -0{,}61 & 1 & 0 \\ -0{,}35 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ 0 & 2 & 0{,}78 & 2 & 0 & -1{,}22 & 0{,}78 & 2 \\ 0 & -0{,} & -0{,}7 & 0 & 2 & 1{,}3 & 1{,}3 & 2 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} -0{,}15 & 1 & 0 \\ -0{,}1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ 0 & -0{,}3 & 1{,}7 & 2 & 0 & -0{,}3 & 1{,}7 & 2 \\ 0 & -0{,}3 & -0{,}3 & 0 & 2 & 1{,}7 & 1{,}7 & 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 0{,}26 & 1 & 0 \\ -0{,} & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ 0 & 0{,}52 & 2{,}52 & 2 & 0 & 0{,}52 & 2{,}52 & 2 \\ 0 & -0{,}3 & -0{,}3 & 0 & 2 & 1{,}7 & 1{,}7 & 2 \end{pmatrix}$

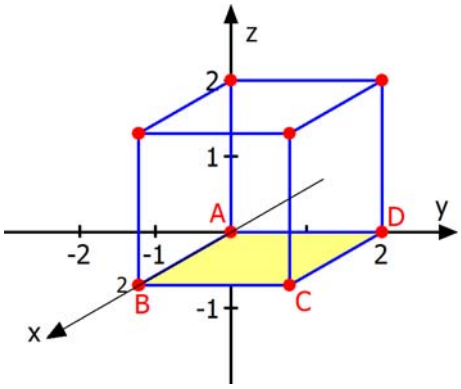
d) $\begin{pmatrix} 0{,}26 & 1 & 0 \\ 0{,}62 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ 0 & 0{,}52 & 2{,}52 & 2 & 0 & 0{,}52 & 2{,}52 & 2 \\ 0 & 1{,}24 & 1{,}24 & 0 & 2 & 3{,}24 & 3{,}24 & 2 \end{pmatrix}$

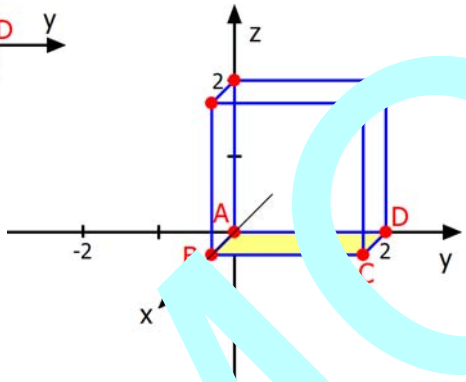
e) $\begin{pmatrix} 0{,}26 & 1 & 0 \\ -0{,}62 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ 0 & 0{,}52 & 2{,}52 & 2 & 0 & 0{,}52 & 2{,}52 & 2 \\ 0 & -1{,}24 & -1{,}24 & 0 & 2 & 0{,}76 & 0{,}76 & 2 \end{pmatrix}$

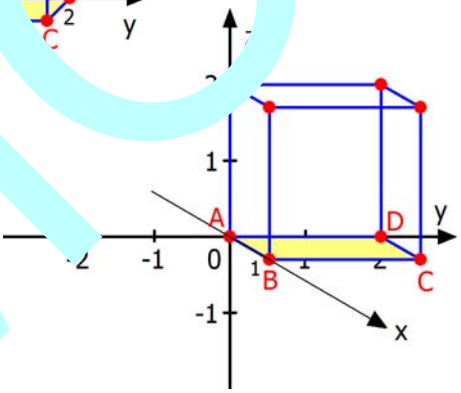
f) $\begin{pmatrix} 0{,}26 & 1 & 0 \\ -0{,}62 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ 0 & 0{,}52 & 2{,}52 & 2 & 0 & 0{,}52 & 2{,}52 & 2 \\ 0 & -1{,}24 & -1{,}24 & 0 & 2 & 0{,}76 & 0{,}76 & 2 \end{pmatrix}$

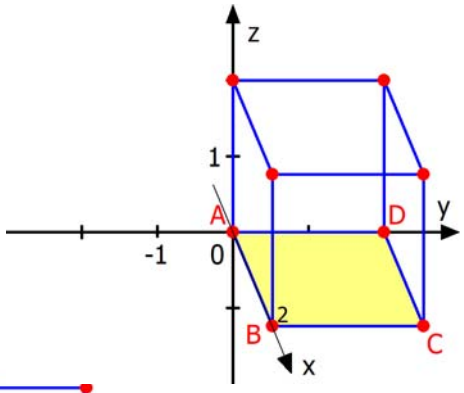
DEMO

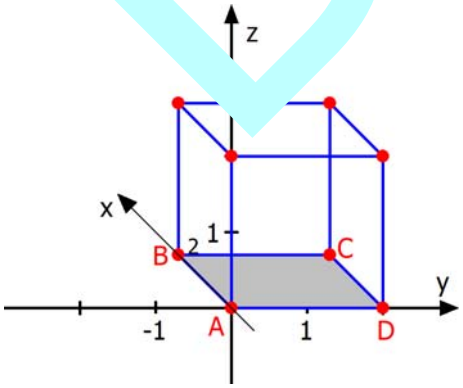
Die Bodenfläche des Würfels ist innen gelb, außen grau.
Sieht man also die Bodenfläche gelb, blickt man von schräg oben auf den Würfel
(dessen andere Flächen durchsichtig sind.)

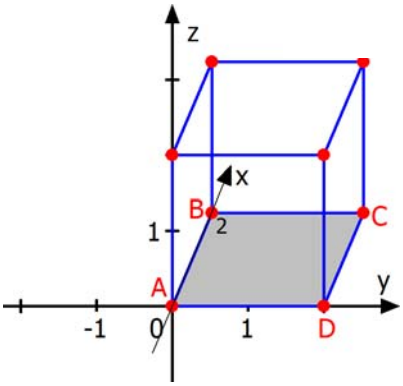












Bei diesen beiden Schrägbildern blickt man **<u>von unten</u>** auf den Würfel. Dies erkennt man auch am Umlaufsinn der vier Eckpunkten A, B, C und D. Er ist beim Blick vom oben gegen den Uhrzeigersinn, beim Blick von unten im Uhrzeigersinn!

DEMO

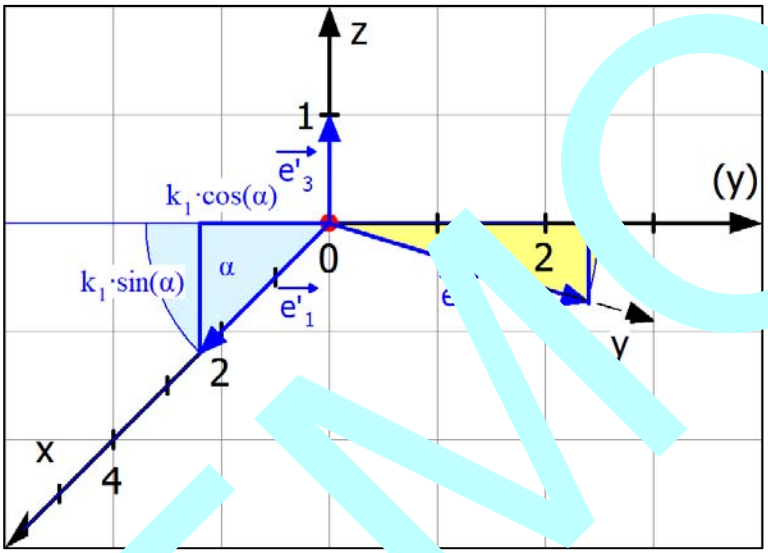
3. Projektionen mit zwei schrägen Achsen:

3.1 Allgemeine Formeln zur Projektion

Bei schräg liegenden x- und y-Achsen lautet die Transformationsmatrix

$$T = \begin{pmatrix} -k_1 \cdot \cos\alpha & k_2 \cdot \cos\beta & 0 \\ -k_1 \cdot \sin\alpha & -k_2 \cdot \sin\beta & 1 \end{pmatrix}.$$

Die **Herleitung** erkennt man aus der Zeichnung.



$\vec{e}'_1$ ist das Bild von $\vec{e}_1$. [illegible] die Beträ[illegible] gilt: $|\vec{e}_1| = 1$ und $|\vec{e}'_1| = k_1 \cdot |\vec{e}_1| = k_1$.

Damit erhält man die Kompone[illegible] von $\vec{e}'_1$ so:

$\vec{e}'_1 = \begin{pmatrix} -k_1 \cdot c[illegible] \\ [illegible]n\alpha \end{pmatrix}$. Analoges gilt für $\vec{e}'_2 = \begin{pmatrix} k_2 \cdot \cos\beta \\ -k_2 \cdot \sin\beta \end{pmatrix}$

Für die [illegible]ndard-Einheitsvekto[illegible]n folgt dann:

Denn: $f(\vec{e}_1) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ [illegible] \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -k[illegible]\cos\alpha \\ [illegible]_1 \cdot \sin\alpha \end{pmatrix}$ und $f(\vec{e}_2) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} k_2 \cdot \cos\beta \\ -k_2 \cdot \sin\beta \end{pmatrix}$, $f(\vec{e}_3) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Da f eine lineare Abbildung ist, gilt für beliebige Vektoren:

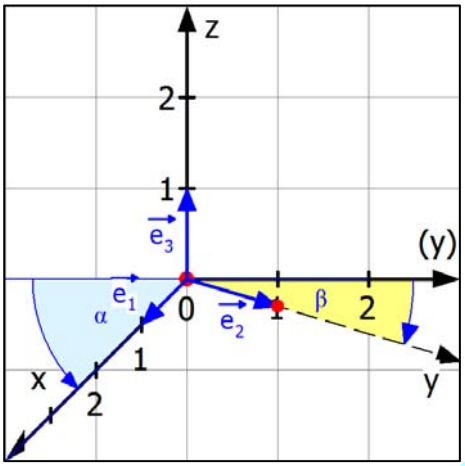
$$f(\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = f(x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 + z\vec{e}_3) = x \cdot f(\vec{e}_1) + y \cdot f(\vec{e}_2) + z \cdot f(\vec{e}_3) = x \cdot \begin{pmatrix} -k_1 \cdot \cos\alpha \\ -k_1 \cdot \sin\alpha \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} k_2 \cdot \cos\beta \\ -k_2 \cdot \sin\beta \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Oder in Matrixschreibweise: $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix} -k_1 \cdot \cos\alpha & k_2 \cdot \cos\beta & 0 \\ -k_1 \cdot \sin\alpha & -k_2 \cdot \sin\beta & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, kurz $f(\vec{x}) = T \cdot \vec{x}$

Es folgen nun spezielle Projektionen

DEMO

3.2



Dabei werden die Vektorkoordinaten wie folgt umgewan[illegible]: f: $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ du[illegible]

$$f(\vec{e}_1) = f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-k_1\cdot\cos\alpha\\-k_1\cdot\sin[illegible]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0[illegible]\\-0,[illegible]\end{pmatrix}$$

$$f(\vec{e}_2) = f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}k_2\cdot\cos[illegible]\\-k_2\cdot\sin\beta[illegible]\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}[illegible]\\-0,[illegible]\end{pmatrix}$$

$$f(\vec{e}[illegible]) = f\left(\begin{pmatrix}0\\[illegible]\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\[illegible]\end{pmatrix}$$

Da f eine lineare Abbildung [illegible] gilt für beliebige Vekto[illegible]

$$f(\vec{x}) = f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = f(x\vec{e}_1 + [illegible] + z\vec{e}_3) [illegible]\cdot f(\vec{e}_1) + y\cdot f(\vec{e}_2) + z\cdot f(\vec{e}_3) = x\cdot\begin{pmatrix}-0,5\\-0,5\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}1\\-0,25\end{pmatrix} + z\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Oder in M[illegible]xschreibwei[illegible] $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix}-0,5 & 1 & 0\\ [illegible] & -0,25 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, kurz $f(\vec{x}) = T\cdot\vec{x}$

mit $[illegible] = \begin{pmatrix}-0,5 & 1 & 0\\-0,5 & -0,25 & 1\end{pmatrix}$

Zusatz: **Die [illegible]vek[illegible] schrägen Achsen** kann man einfach bestimmen.

Mit $k_1 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$ folgt für die

x-Achse: $$f(\vec{e}_1) = \begin{pmatrix}-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\cos\alpha\\-\frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\sin\alpha\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-0,5\\-0,5\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\\ \sin\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2}\end{cases} \Rightarrow \alpha = 45^{\circ}$$

y-Achse: $$\tan\beta = \frac{\frac{1}{4}}{1} = 0,25 \Rightarrow \beta = \arctan(0,25) \approx 14^{\circ}$$

Wir projizieren damit jetzt die im Beispiel 2 behandelte Pyramide.

DEMO

Zu Beispiel 2: Schrägbild einer quadratischen Pyramide

mit den Eckpunkten $A(0|0|0)$, $B(4|0|0)$, $C(4|4|0)$, $D(0|4|0)$, $S(2|2|6)$

Transformation der Ortsvektoren:

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-0{,}5 & 1 & 0\\-0{,}5 & -0{,}25 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad A'(0|0)$$

$$f\left(\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-0{,}5 & 1 & 0\\-0{,}5 & -0{,}25 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad B'(-2|-2)$$

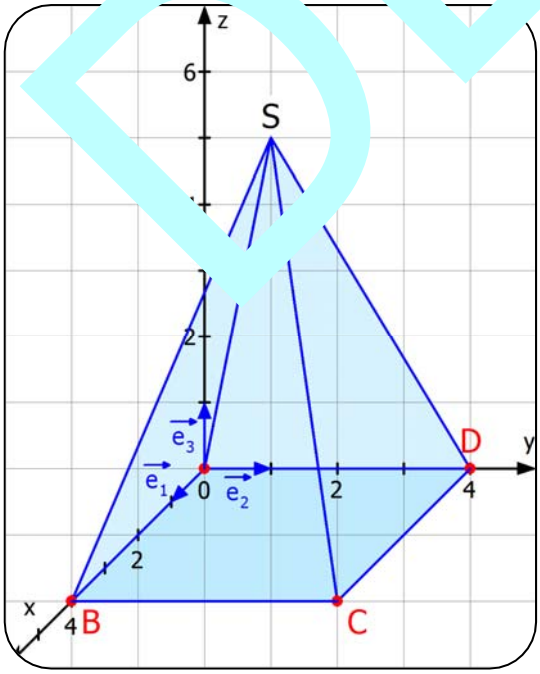
$$f\left(\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-0{,}5 & 1 & 0\\-0{,}5 & -0{,}25 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-3\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad C'(2|-3)$$

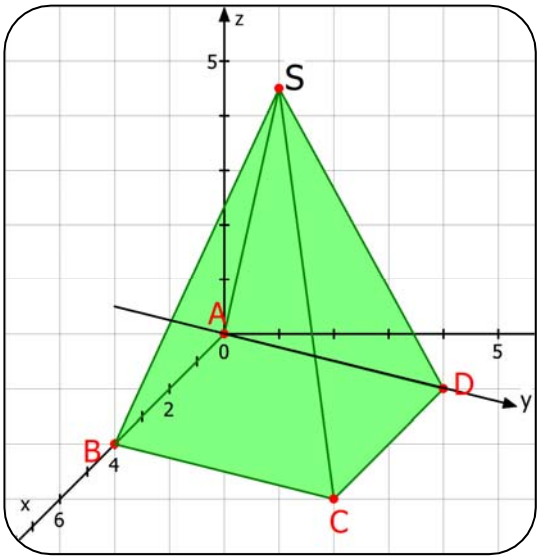
$$f\left(\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-0{,}5 & 1 & 0\\-0{,}5 & -0{,}25 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad D'(\ \ |-1)$$

$$f\left(\begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-0{,}5 & 1 & 0\\-0{,}5 & -0{,}25 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-5\end{pmatrix}\quad\Rightarrow\quad S'(\ \ |4{,}5)$$

Die rechte Darstellung zeigt das oben berechnete Schrägbild.

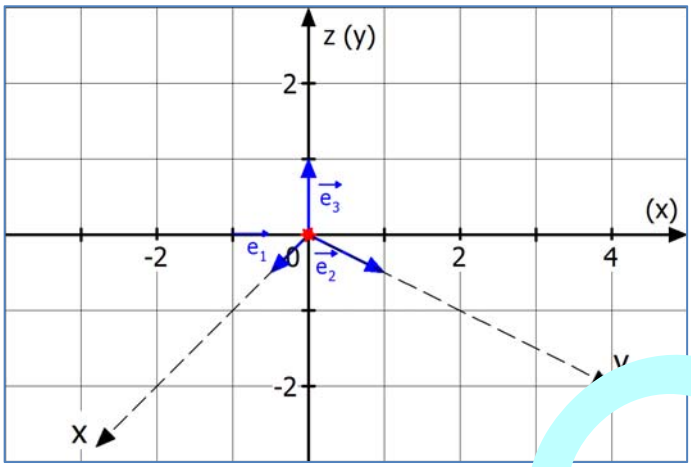
Die x- und die y-Achse sind mit der Variante des Schrägbildes identisch.
Lediglich die y-Achse ist jetzt nach unten, wobei die „alte y-Achse“ ohne Pfeil noch sichtbar ist. Man braucht sie zum Abtragen der berechneten Punktkoordinaten.





DEMO

3.3



Die ursprünglichen x- und y-Achsen sind in Klam[illegible]n angedeutet.

Dabei werden die Vektorkoordinaten wie folgt umgewanc[illegible] $\mathbb{R}^3 \to$ [illegible]rch

$$f(\vec{e}_1) = f\left(\begin{pmatrix}1\\[illegible]\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-0{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}$$

$$[illegible]_2) = f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\[illegible]\end{pmatrix}$$

$$f(\vec{e}[illegible]\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Da f eine lin[illegible] ist, gilt [illegible]eliebi[illegible]ektoren:

$$x) = f\left(\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right) = f(x\vec{e}_1 + [illegible] + z\vec{e}_3) = x\cdot f(\vec{e}_1) + y\cdot f(\vec{e}_2) + z\cdot f(\vec{e}_3) = x\cdot\begin{pmatrix}-0{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix} + y\cdot\begin{pmatrix}1\\-0{,}5\end{pmatrix} + z\cdot\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

Oder in Matrix[illegible]ibweis[illegible] $f(\vec{x}) = \begin{pmatrix}-0{,}5 & 1 & 0\\-0{,}5 & -0{,}5 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$, kurz $f(\vec{x}) = T\cdot\vec{x}$

mit $T = \begin{pmatrix}-0{,}5 & 1 & 0\\-0{,}5 & -0{,}5 & 1\end{pmatrix}$

Wir transformieren damit jetzt den im Beispiel 3 behandelten Turm.

DEMO

Zu Beispiel 3: Der Turm

Grundfläche: $A(0|0|0),\ B(6|0|0),\ C(6|6|0),\ D(0|6|0)$

Obere Eckpunkte: $E(0|0|14),\ F(6|0|14),\ G(6|6|14),\ H(0|6|14)$

Spitze: $S(3|3|20)$

Berechnung der Schrägbildpunkte:

$$A(0|0|0) \rightarrow \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}25 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A'(0|0)$$

$$B(6|0|0) \rightarrow \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ -3 \end{pmatrix} \Rightarrow B'(-3|-3)$$

$$C(6|6|0) \rightarrow \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \end{pmatrix} \Rightarrow C'(3|-$$

$$D(0|6|0) \rightarrow \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix} \quad D'(6|-3)$$

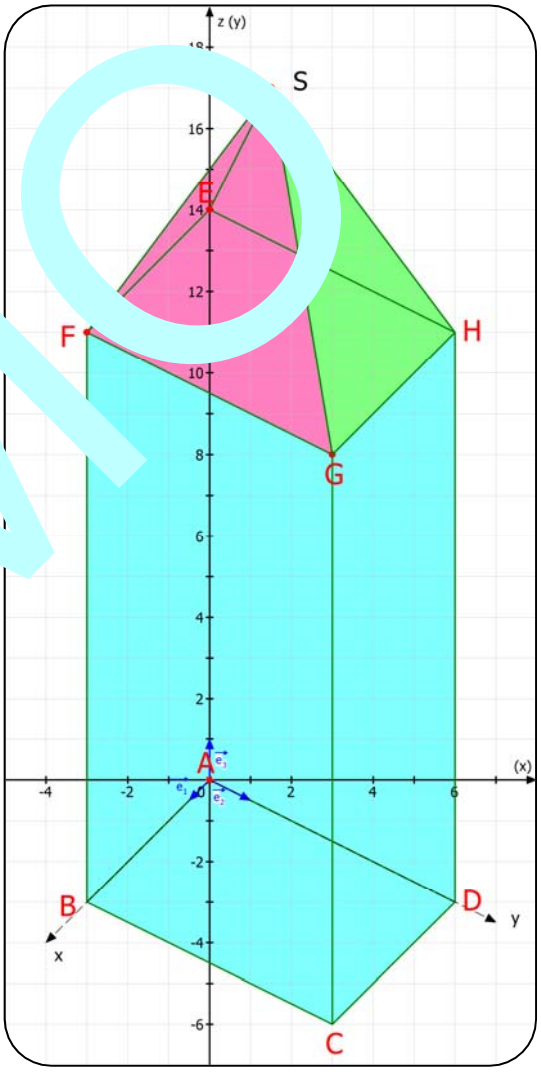
$$E(0|0|14) \rightarrow \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \quad (0|14)$$

$$F(6|0|14) \rightarrow \begin{pmatrix} -0{,}5 & & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow F'(-3|11)$$

$$G(6|6|14) \quad \begin{pmatrix} -0{,}5 & -0, & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 14 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ \end{pmatrix} \quad G'(3|8)$$

$$H(0|6|\ \rightarrow \begin{pmatrix} -0{,}5 & 1 & 0 \\ -0{,}5 & -0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 14 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 11 \end{pmatrix} \Rightarrow H'(6|11)$$

$$S(3|3|20) \rightarrow \begin{pmatrix} -0 & & 0 \\ -0{,}5 & 0{,}5 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 17 \end{pmatrix} \Rightarrow S'(1{,}5|17)$$



Man vergleiche dieses Schrägbild mit dem auf Seite 10.
Hier blickt man mehr von oben auf den Turm.

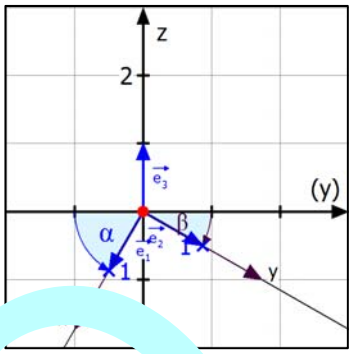
DEMO

3.4 Die „Militärprojektion“

Die im Titel genannte „Militärprojektion“ verwendet $k_1 = k_2 = 1$, $\alpha = 60^{\circ}$ und $\beta = 30^{\circ}$:

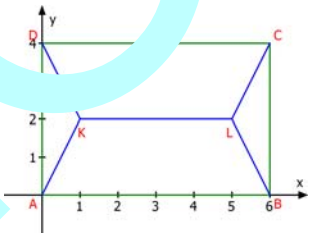
Damit lautet die Transformationsmatrix so:

$$T = \begin{pmatrix} -\cos 60^{\circ} & \cos 30^{\circ} & 0 \\ -\sin 60^{\circ} & -\sin 30^{\circ} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$



Zu Beispiel 1 (das auf Seite 4/5 beschriebene Haus):

Ein Haus wird schematisch durch einen liegenden Quader modellie
Es hat die Länge 6 LE, die Breite 4 LE und die Höhe 2 LE.
Darauf sitzt ein Walmdach der Höhe 1 LE.
die mittlere obere Dachkante hat die Länge 4 LE.



Berechnung der 3D-Koorinaten der Ecken:

$A(0|0|0)$, $B(6|0|0)$, $C(6|4|0)$, $D(0|4|0)$,
$E(0|0|2)$, $F(6|0|2)$, $G(6|4|2)$, $H(0|$ [illegible] $K(1|2|3)$, [illegible]$5|2|$ [illegible]

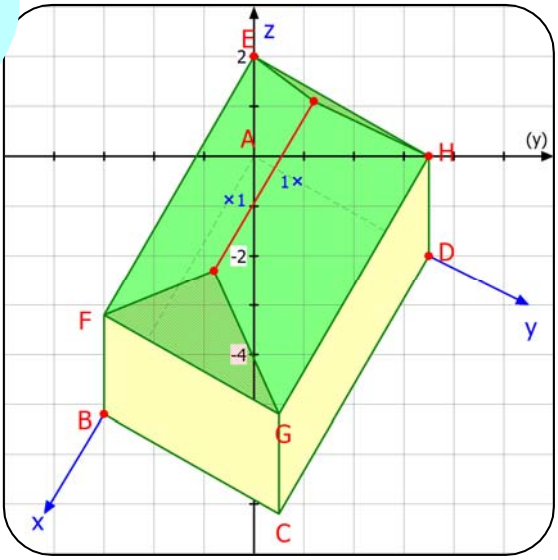
Ich berechne alle Koordinaten „zugleich“ mit [illegible]r Ma[illegible]

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & [illegible] & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & [illegible] & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & [illegible] & 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & [illegible] & 2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & 0 & -3 & -3+2\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \\ [illegible] & 3\sqrt{3} & -3\sqrt{[illegible]} & [illegible] & -2 & 2 & 2-3\sqrt{3} & -3\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} A & B & C & D & E & F & G & H \\ 0 & -3 & 0{,}5 & 3{,}5 & 0 & [illegible] & [illegible] & 3{,}5 \\ 0 & -5{,}2 & -7{,}2 & -2 & 2 & -3{,}[illegible] & [illegible]{,}2 & 0 \end{pmatrix}$$ (1. Z[illegible] = Namen der Punkte)

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & [illegible] & 0 \\ -\frac{1}{2}[illegible] & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & [illegible] \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [illegible]\sqrt{3} - \frac{1}{2} & [illegible] \\ [illegible]\frac{1}{2}\sqrt{3} & 2 - [illegible]\frac{1}{2}\sqrt{3} \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} K & L \\ 1{,}2 & -0{,}8 \\ 1{,}1 & -2{,}3 \end{pmatrix}$$

Das graph[illegible]e Ergebnis:



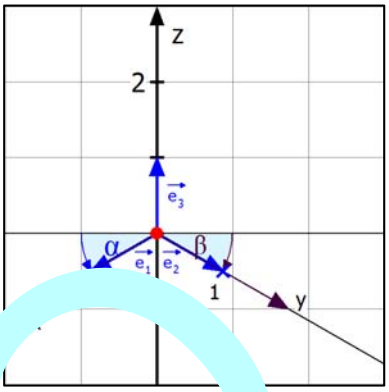
DEMO

3.5 Die Isometrie

Die im Titel genannte „Isometrie“ verwendet $k_1 = k_2 = 1$, $\alpha = 30^{\circ}$ und $\beta = 30^{\circ}$:

Damit lautet die Transformationsmatrix:

$$T = \begin{pmatrix} -\cos 30^{\circ} & \cos 30^{\circ} & 0 \\ -\sin 30^{\circ} & -\sin 30^{\circ} & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$$



Und nochmals ein Schrägbild unseres Hauses mit Walmdach.

Berechnung der 2D-Koorinaten der Ecken:

$A(0|0|0)$, $B(6|0|0)$, $C(6|4|0)$, $D(0|4|0)$, $E(0|0|2)$, $F(6$ [illegible] $|2)$, $G(6|4|2)$, $H($ [illegible] $|2)$
$K(1|2|3)$, $L(5|2|3)$:

Ich berechne alle Koordinaten „zugleich“ mit einer Matrix

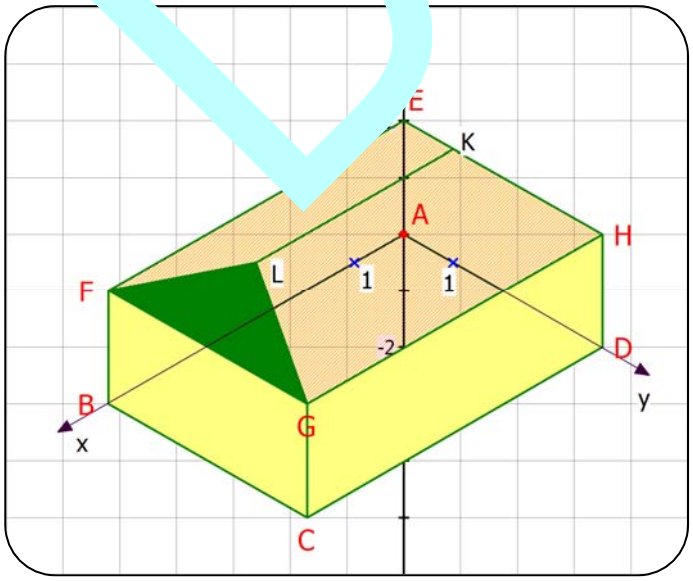
Die Ergebnismatrix hat natürlich nur zwei Zahlenzeilen. Die [illegible]rüb[illegible]tehende Buchstabenzeile soll nur angeben, zu welchem Punkt die darunter stehenden [illegible]ordi[illegible]n gehören!

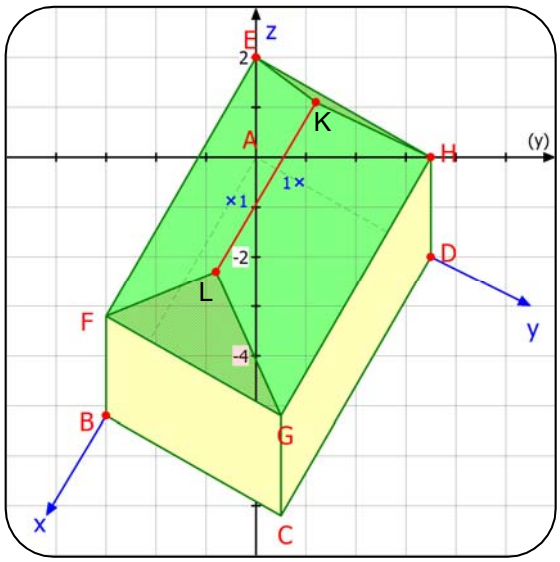
$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & 0 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 6 & 6 & 0 & 0 & 6 & 6 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & 4 & 0 & 0 & 4 & [illegible] & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 2 & [illegible] & 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & [illegible] & C & [illegible] & E & F & G & H & K & L \\ [illegible] & -3\sqrt{3} & [illegible] & 2\sqrt{[illegible]} & 0 & -3\sqrt{3} & -\sqrt{3} & 2\sqrt{3} & \frac{1}{2}\sqrt{3} & -\frac{3}{2}\sqrt{3} \\ 0 & [illegible] & -5 & [illegible] & [illegible] & -1 & -3 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\approx \begin{pmatrix} A & B & [illegible] & D & E & F & G & H & K & L \\ 0 & -5,2 & [illegible] & 3,5 & 0 & -5,2 & -1,7 & 3,5 & 0,87 & -2,6 \\ 0 & [illegible] & -5 & -2 & 2 & -1 & -3 & 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Das graphisch[illegible]:

Links die [illegible]bildung durch [illegible]metrie, rechts die Militärprojektion.





DEMO